Blatt 8, Aufgabe 2: Portfolio Auswahl

Jörg Nikutta

4. Dezember 2002

1 Portfolio Auswahl[1]

Es gibt zwei Zustände der Welt, die mit S_1 und S_2 bezeichnet werden (z.B. die Europäische Zentralbank senkt die Zinsen oder nicht; es findet im Irak ein Krieg statt oder nicht etc). Je nachdem welcher Zustand eintritt, sind die Auszahlungen der beiden Wertpapiere unterschiedlich.

1.1 a) Erwartungswerte und Varianzen:

Wertpapier A:

$$\begin{aligned} E\left[X_A\right] &= p_1 30 + p_2 0 \\ &= \frac{1}{2}30 + 0 = 15 \\ Var\left(X_A\right) &= p_1\left(30 - E\left[X_A\right]\right)^2 + p_2\left(0 - E\left[X_A\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(30-15\right)^2 + \frac{1}{2}\left(0-15\right)^2 \\ &= 15^2 = 225 \end{aligned}$$

Wertpapier B:

$$\begin{aligned} E\left[X_B\right] &= p_1 10 + p_2 15 \\ &= \frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}15 = 12.5 \\ Var\left(X_B\right) &= p_1\left(10 - E\left[X_B\right]\right)^2 + p_2\left(15 - E\left[X_B\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(10-12.5\right)^2 + \frac{1}{2}\left(15-12.5\right)^2 \\ &= 2.5^2 = 6.25 \end{aligned}$$

[1] Achtung: Diese Lösung kann Fehler enthalten!!

1.2 b) Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Bei der Kovarianz ist eigentlich nur das Vorzeichen interessant[2]. Die Kovarianz gibt an, ob zwei Zufallsvariablen die gleiche Tendenz haben oder nicht. In unserem Fall bedeutet dies: hat ein Wertpapier eine hohe Rendite, hat dann das andere auch eine hohe Rendite?

Definition: Die Kovarianz wischen zwei Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch

$$Cov\left(X,Y\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i-E\left[X\right]\right)\left(y_i-E\left[Y\right]\right),$$

wobei x_i und y_i die Werte der beiden Zufallsvariablen sind, die im Zustand i angenommen werden. Die Kovarianz ist mit der Varianz verwandt. Es gilt

$$Cov\left(X,X\right)=Var\left(X\right).$$

Der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y ist eine normierte Kovarianz. D.h. man skaliert die Kovarianz so um, dass sie immer zwischen -1 und 1 liegt:

$$\rho_{XY}=\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y},$$

wobei σ_X die Standardabweichung[3] von X und σ_Y die Standardabweichung von Y ist. Es gilt $\rho_{XY}\in\left[-1,1\right]$, d.h. wir wissen, dass der Korrelationskoeffizient immer zwischen -1 und 1 liegt. Wenn[4]

$$\rho_{XY}=\begin{cases}\text{-1} & \text{dann sind die Zufallsvariablen vollkommen negativ korreliert}\\ 0 & \text{dann sind die Zufallsvariablen unabhängig}\\ 1 & \text{dann sind die Zufallsvariablen vollkommen positiv korreliert}\end{cases}$$

In dieser Aufgabe gilt:

$$\begin{aligned}&Cov\left(X_A,X_B\right)\\ =\ &\frac{1}{2}\left(30-15\right)\left(10-12.5\right)+\frac{1}{2}\left(0-15\right)\left(15-12.5\right)\\ =\ &\frac{1}{2}15\left(-2.5\right)+\frac{1}{2}\left(-15\right)2.5=-37.5.\end{aligned}$$

[2] Die Zahl an sich sagt zwar auch etwas aus, aber das Vorzeichen ist deutlich wichtiger

[3] Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz, d.h. $\sigma_X=\sqrt{Var\left(X\right)}$.

[4] Negativ korreliert d.h. wenn die eine hoch geht, geht die andere runter. Unabhängig: Wenn man weiß, dass die eine hoch geht, weiss man nichts darüber was die andere machen wird. Positive korreliert: Wenn eine Zuvallsvariable hoch geht, geht auch die andere hoch.

Demnach ist der Korrelationskoeffizient

$$\rho_{XY} = \frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-37.5}{2.5 * 15} = -1.$$

Die beiden Anlagemöglichkeiten sind also vollkommen negativ korreliert, d.h. wenn die eine eine hohe Rendite abwirft, wirft die andere eine geringe ab und umgekehrt.

1.3 c) Risikoloses Portfolio

Ein Portfolio ist im Prinzip ein Bankdepot, in welchem verschiedene Wertpapiere gemeinsam lagern. Dementsprechend kann man ausrechnen, was die erwartete Rendite und die Varianz dieses Portfolios ist. Bezeichne mit α den Anteil von Wertpapier A und mit β den Anteil[5] von Wertpapier B im Portfolio.
Die erwartete Rendite des Portfolios ist

$$\mu_P = \alpha\mu_A + \beta\mu_B,$$

wobei $\mu_A = E\left[X_A\right]$ die erwartete Rendite von Wertpapier A und $\mu_B = E\left[X_B\right]$ die erwartete Rendite von Wertpapier B ist.
Nun zur Varianz[6] des Portfolios $\sigma_P^2 = Var\left(X_p\right)$. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= Var\left(X_p\right) \\ &= Var\left(\alpha X_A + \beta X_B\right) \\ &= \alpha^2 Var\left(X_A\right) + \beta^2 Var\left(X_B\right) + 2\alpha\beta Cov\left(X_A, X_B\right) \\ &= \alpha^2\sigma_A^2 + \beta^2\sigma_B^2 + 2\alpha\beta\rho_{AB}\sigma_A\sigma_b, \end{aligned}$$

da

$$\rho_{AB} = \frac{Cov\left(X_A, X_B\right)}{\sigma_A \sigma_B}$$

und σ_A die Standardabweichung von Wertpapier A, σ_B die Standardabweichung von Wertpapier B ist.

[5] Da dies die beiden einzigen Wertpapiere in dem Portfolio sind, müssen sich die Anteile zu 1 addieren, d.h. $\alpha + \beta = 1$.

[6] Rechenregeln für Varianzen: $Var\left(\lambda X\right) = \lambda^2 Var\left(X\right),\ Var\left(X+Y\right) = Var\left(X\right) + Var\left(Y\right) + 2Cov\left(X,Y\right).$ Zusammen gilt demnach: $Var\left(\alpha X + \beta Y\right) = \alpha^2 Var\left(X\right) + \beta^2 Var\left(Y\right) + 2\alpha\beta Cov\left(X,Y\right).$

Für $\rho_{AB} = -1$ gilt also

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \alpha^2\sigma_A^2 + \beta^2\sigma_B^2 - 2\alpha\beta\sigma_A\sigma_b \\ &= \left(\alpha\sigma_A - \beta\sigma_b\right)^2.\end{aligned}$$

Ein Portfolio heißt risikolos, wenn die Varianz Null ist. D.h. es gibt immer eine sichere Auszahlung (unabhängig welcher Zustand eintritt). Also berechnen wir α und β so, dass $\sigma_P^2 = 0$. Dies ist nur erfüllt, wenn das Innere der Klammer gleich Null ist, d.h.

$$\alpha\sigma_A - \beta\sigma_b = 0.$$

Da gilt $\beta = 1 - \alpha$ und wir die Standardabweichung auch bereits berechnet haben mit $\sigma_A = 15$ und $\sigma_b = 2.5$, gilt

$$\alpha 15 - (1-\alpha)\, 2.5 = 0.$$

Daraus folgt: $\alpha = \frac{2.5}{17.5} = \frac{1}{7} = 0.143$. Also ist $\beta = \frac{6}{7} = 0.857$. Das risikolose Portfolio besteht also zu 14.3% aus Wertpapier A und zu 85.7% aus Wertpapier B. Die erwartete Rendite ist

$$\begin{aligned}\mu_P &= \frac{1}{7}15 + \frac{6}{7}12.5 \\ &= 12.857.\end{aligned}$$

Damit hat das risikolose Wertpapier eine Rendite, welche oberhalb der von Wertpapier B liegt. Diese Rendite fällt in **beiden Zuständen** an, ist also fast so etwas wie ein Sparbuch....